

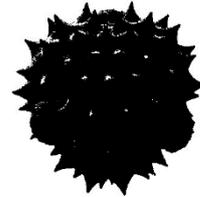
## Aufgaben Erwartungswert und Standardabweichung bei Bernoulli-Ketten

2. Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Trefferzahl  $X$  in einer Bernoullikette mit den Parametern  $n$  und  $p$ .

- a)  $n = 12, p = 0,4,$                       b)  $n = 125, p = 0,2,$                       c)  $n = 37\,400, p = 0,95.$

3. Pollen können Heuschnupfen auslösen. Ein Nasenspray wirkt in 70% aller Anwendungsfälle lindernd.

- a) 20 Patienten nehmen das Mittel gegen ihre Beschwerden ein. Bei wie vielen Patienten ist eine Linderung zu erwarten?  
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass exakt bei dieser erwarteten Anzahl unter den 20 Patienten das Mittel hilft?



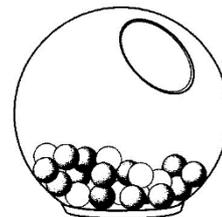
4. Von einer binomialverteilten Zufallsgröße sind der Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  bekannt. Berechnen Sie die Parameter  $n$  und  $p$  der Verteilung.

- a)  $\mu = 5, \sigma = 2$                       b)  $\mu = 225, \sigma = 7,5$                       c)  $\mu = 7,2, \sigma = 1,2 \cdot \sqrt{2}$

5. Ein Autohersteller bestellt Scheinwerferlampen für sein Standardmodell, das schon länger hergestellt wird. Erfahrungsgemäß sind 4% der Lampen fehlerhaft.

- a) Wie viele fehlerhafte Lampen sind in einer Lieferung von 5000 Lampen zu erwarten? Geben Sie die Standardabweichung an.  
b) Der Autohersteller benötigt im Mittel mindestens 6000 fehlerfreie Lampen. Wie viele Lampen soll er bestellen?

6. In einer Urne befinden sich 4 rote, 6 gelbe und 10 blaue Kugeln. Es werden  $n$  Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt die Anzahl der roten Kugeln und die Zufallsgröße  $Y$  die Anzahl der gelben Kugeln unter den gezogenen Kugeln.



- a) Sei  $n = 8$ .  
Skizzieren Sie die zugehörige Binomialverteilung der Zufallsgröße  $X$ .  
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von  $X$ .  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit überschreitet der tatsächliche Wert von  $X$  den Erwartungswert  $E(X)$ ?  
b) Wie viele Kugeln müssen mindestens gezogen werden, damit der Erwartungswert der Zufallsgröße  $Y$  größer als 5 ist? Wie groß ist in diesem Fall die Varianz von  $Y$ ?  
c) Wie viele Kugeln müssen mindestens gezogen werden, damit der Erwartungswert von  $X$  mindestens gleich 1 ist?  
d) Wie viele Kugeln müssen mindestens gezogen werden, wenn mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel gezogen werden soll?

Lösung:

2. a)  $n = 12$ ,  $p = 0,4$ ,  $E(X) = n \cdot p = 4,8$ ,  $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 2,88$ ,  $\sigma(x) = 1,697$   
b)  $n = 125$ ,  $p = 0,2$ ,  $E(X) = 25$ ,  $V(X) = 20$ ,  $\sigma(X) = 4,472$   
c)  $n = 37400$ ,  $p = 0,95$ ,  $E(X) = 35530$ ,  $V(X) = 1776,5$ ,  $\sigma(X) = 42,149$

3. a)  $n = 20$ ;  $p = 0,7$   
X: Anzahl der Patienten, bei denen das Nasenspray lindernd wirkt  
 $E(X) = np = 14$

b)  $P(X=14) = \binom{20}{14} \cdot 0,7^{14} \cdot 0,3^6 \approx 0,1916$

4. a)  $\left. \begin{array}{l} \mu = 5 = n \cdot p \\ V(X) = 4 = n \cdot p \cdot (1-p) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V(X)}{\mu} = 1-p = \frac{4}{5} \Rightarrow p = \frac{1}{5}, n = 25$   
b)  $\left. \begin{array}{l} \mu = 225 \\ V(X) = 56,25 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-p = 0,25 \Rightarrow p = 0,75, n = 300$   
c)  $\left. \begin{array}{l} \mu = 7,2 \\ V(X) = 2,88 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-p = 0,4 \Rightarrow p = 0,6, n = 12$

5. a)  $n = 5000$ ;  $p = 0,04$ ;  $E(X) = 200$ ;  $V(X) = 192$ ;  $\sigma(X) \approx 13,86$   
b) Der Stichprobenumfang  $n$  ist zu bestimmen,  $p = 0,96$  (Lampe funktioniert).  
Ansatz:  $n \cdot p \geq 6000 \Leftrightarrow n \geq 6250$   
Es sollten mindestens 6250 Lampen bestellt werden.

6. a)  $n = 8$ ;  $p = \frac{1}{5}$ ;  $E(X) = \frac{8}{5}$ ;  $V(X) = 1,28$ ;  $\sigma \approx 1,13$

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - \left( \left(\frac{4}{5}\right)^8 + \binom{8}{1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 \right) \approx 0,4967$$

- b)  $p = 0,3$ ;  $n \cdot 0,3 > 5 \Leftrightarrow n > 16,67$   
Es müssen mindestens 17 Kugeln gezogen werden.

Mit  $n = 17$ :  $V(X) = 17 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 3,57$

- c)  $p = 0,2$ ;  $n \cdot 0,2 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 5$   
Es müssen mindestens 5 Kugeln gezogen werden.

- d)  $P(\text{keine rote Kugel bei } n \text{ gezogenen}) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$   
 $P(\text{mindestens eine rote Kugel unter } n \text{ gezogenen}) = 1 - 0,8^n$

$$1 - 0,8^n \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,1, n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 10,32$$

Es sind mindestens 11 Kugeln zu ziehen.